

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۴/۸/۲۱

وقت : ۷۵ دقیقه



دانشکده ریاضی

نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

امتحان میان ترم درس : معادلات دیفرانسیل ( ۷ گروه هماهنگ )

نیمسال ( اول / ~~دوم~~ ) ۱۳۹۵ - ۱۳۹۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ - معادله مرتبه اول  $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$  را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۲ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید : ۱۵ نمره

$$(3x + \sin y^2)dx + xy \cos y^2 dy = 0$$

سوال ۳ - تابع  $y_1 = x$  یک جواب معادله  $y' = 1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$  است. تمام جوابهای آن را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۴ - مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای  $y = (x - c)^3$  را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۵ - معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را به کمک روش ضرایب نامعین حل کنید : ۲۰ نمره

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + 4 \sin 2x$$

موفق باشید



**جواب سوال ۱:** معادله را به صورت  $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$  می‌نویسیم. این معادله یک معادله همگن است. با تغییر متغیر

$$y = xu \quad \text{داریم:} \quad xu' = \sqrt{1-u^2} \quad \text{و در نتیجه} \quad u + xu' = \frac{xu + \sqrt{x^2 - x^2 u^2}}{x}$$

این معادله، یک معادله جدایی‌پذیر است و داریم  $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$ . اکنون با انتگرالگیری از طرفین داریم

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x} \quad \text{یا} \quad u = \sin(\ln x + c) \rightarrow \arcsin u = \ln x + c \quad \text{و بالاخره داریم:} \quad \boxed{y = x \sin(\ln x + c)}$$

**جواب سوال ۲:** داریم:  $M = 3x + \sin y^2$ ,  $N = xy \cos y^2 \rightarrow M_y = 2y \cos y^2$ ,  $N_x = y \cos y^2$

این معادله کامل نیست اما چون  $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{y \cos y^2}{xy \cos y^2} = \frac{1}{x}$  مستقل از  $y$  است بنابر این یک عامل انتگرال‌ساز یک متغیره بر

حسب  $x$  دارد. داریم:  $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$  و با ضرب این عامل انتگرال‌ساز در طرفین معادله داریم:

$$(3x^2 + x \sin y^2) dx + x^2 y \cos y^2 dy = 0$$

که یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از:  $\boxed{x^2 + \frac{1}{3} x^2 \sin y^2 = c}$

**جواب سوال ۳:** این معادله، یک معادله ریکاتی است. با تغییر متغیر  $y = x + \frac{1}{v}$  آن را حل می‌کنیم.

$$\text{داریم:} \quad 1 - \frac{v'}{v^2} = 1 - \left(1 + \frac{1}{xv}\right) + \left(1 + \frac{2}{xv} + \frac{1}{x^2 v^2}\right) \quad \text{و در نتیجه:} \quad -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{xv} + \frac{1}{x^2 v^2} \quad \text{یا} \quad v' + \frac{1}{x} v = \frac{-1}{x^2}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است:  $v = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left( c + \int \frac{-1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right) = e^{-\ln x} \left( c + \int \frac{-1}{x^2} e^{\ln x} dx \right) = \frac{1}{x} \left( c + \int \frac{-1}{x} dx \right)$

$$\text{و داریم:} \quad v = \frac{c - \ln x}{x} \quad \text{و بالاخره داریم:} \quad \boxed{y = x + \frac{x}{c - \ln x}}$$

**جواب سوال ۴:** از معادله  $y = (x-c)^3$  داریم  $y' = 3(x-c)^2$

و در نتیجه:  $(y')^3 = 27(x-c)^6 = 27y^2$  اکنون داریم  $y' = 3 \sqrt[3]{y^2}$

بنابر این معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم دسته منحنیهای داده شده عبارت است از  $y' = \frac{-1}{3 \sqrt[3]{y^2}}$

که یک معادله جدایی‌پذیر است یعنی داریم:  $\sqrt[3]{y^2} dy = -\frac{dx}{3}$

با انتگرالگیری از طرفین معادله داریم:  $\int \sqrt[3]{y^2} dy = \int -\frac{dx}{3}$  و در نتیجه  $\frac{3}{5} y \sqrt[3]{y^2} = -\frac{1}{3} x + \frac{1}{3} c$

$$\text{و یا} \quad y^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{9} (c-x)^3 \quad \text{و بالاخره داریم:} \quad \boxed{y^{\frac{5}{3}} = \frac{125}{729} (c-x)^3}$$

**جواب سوال ۵:** ابتدا معادله همگن نظیر آن را حل می‌کنیم یعنی  $y'' + 3y' + 2y = 0$  معادله مشخصه آن،  $m^2 + 3m + 2 = 0$

دو ریشه حقیقی  $m_1 = -1$  و  $m_2 = -2$  دارد و جواب همگن عبارت است از:  $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$   
جواب خصوصی معادله را در دو مرحله محاسبه می‌کنیم.

به ازای  $h_1(x) = e^{-2x}$  جواب خصوصی را به صورت  $y_{p1} = cxe^{-2x}$  در نظر می‌گیریم.

$$\text{داریم } y'_{p1} = (-2cx + c)e^{-2x}, \quad y''_{p1} = (4cx - 4c)e^{-2x}$$

$$\text{و } y''_{p1} + 3y'_{p1} + 2y_{p1} = -ce^{-2x} = e^{-2x} \text{ یعنی } c = -1 \text{ یعنی } y_{p1} = -xe^{-2x}$$

به ازای  $h_2(x) = 4\sin 2x$  و با توجه به جواب همگن، جواب خصوصی را به صورت  $y_{p2} = a\sin 2x + b\cos 2x$  در نظر

$$\text{می‌گیریم. داریم: } y'_{p2} = 2a\cos 2x - 2b\sin 2x, \quad y''_{p2} = -4a\sin 2x - 4b\cos 2x$$

$$\text{و } y''_{p2} + 3y'_{p2} + 2y_{p2} = (-2a - 6b)\sin 2x + (6a - 2b)\cos 2x = 4\sin 2x \text{ که نتیجه می‌دهد}$$

$$y_{p2} = \frac{-1}{5}(\sin 2x + 3\cos 2x) \text{ و در نتیجه } a = \frac{-1}{5}, \quad b = \frac{-3}{5} \text{ یعنی } -2a - 6b = 4, \quad 6a - 2b = 0$$

$$\text{و بالاخره جواب عمومی معادله عبارت است از: } y_g = Ae^{-x} + Be^{-2x} - xe^{-2x} - \frac{1}{5}(\sin 2x + 3\cos 2x)$$